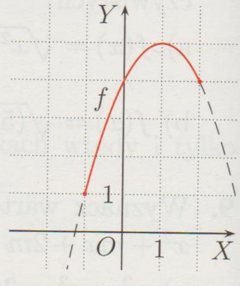
5.12. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $f(x) = -x^2+2x+4$ w przedziale $\langle -1; 2\rangle$.

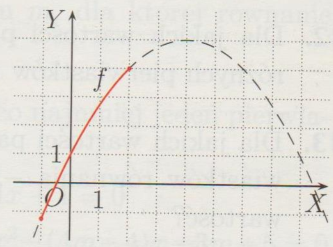


Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału: $f(-1) = 1$ oraz $f(2) = 4$.
Wierzchołek paraboli: $x_w = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_w = f(1) = 5$.
Ponieważ $x_w \in \langle -1; 2\rangle$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji jest przyjmowana w wierzchołku paraboli i wynosi 5. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.

Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $\langle p_1; p_2\rangle$, należy obliczyć $f(p_1)$, $f(p_2)$. Jeśli $x_w \in \langle p_1; p_2\rangle$, to należy wyznaczyć również y_w. Najmniejsza spośród wyznaczonych wartości jest najmniejszą wartością funkcji, a największa – największą wartością funkcji w danym przedziale.

Przykład 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $\langle -1; 2\rangle$.



- $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin \langle -1; 2\rangle$
- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ – wartość najmniejsza
- $f(2) = 4$ – wartość największa

Ćwiczenie 1

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 8$, $\langle -3; 1\rangle$ b) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$, $\langle -1; 3\rangle$

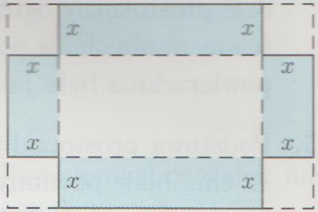
Ćwiczenie 2

W ramce przedstawiono początek rozwiązania zadania polegającego na znalezieniu największej wartości iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa 24. Dokończ to rozwiązanie.

Liczby oznaczamy przez a i b, wtedy $a + b = 24$, zatem:
$$b = 24 - a$$
Iloczyn tych liczb:
$$f(a) = a(24 - a)$$

Przykład 3

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka, w zależności od długości boków wyciętych kwadratów, opisuje funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji: $D = (0; 20)$.

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $P(x) = -8x^2 + 200x$.

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12{,}5 \qquad y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40\,000}{-32} = 1250$$

Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji P przyjmowana jest dla x_w.

Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długości boków wyciętych kwadratów są równe 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm^2.

Ćwiczenie 3

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm^2 wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.